

ÉVALUATION DE L'INCERTITUDE EN UTILISANT LES SIMULATIONS DE MONTE CARLO

M. Désenfant *, N. Fischer *, B. Blanquart **, N. Bédiat**

*Laboratoire national de métrologie et d'essais (LNE)

** Centre Technique des Industries Aéronautiques et Thermiques (CETIAT)

Résumé

Le premier supplément du GUM [1], traitant de l'évaluation de l'incertitude par propagation des distributions, doit paraître en 2007 [2]. Ce supplément, qui utilise la méthode numérique de Monte Carlo permet de traiter les cas où toutes les hypothèses de la loi de propagation des variances (méthode LPU) et les concepts associés ne sont pas vérifiés. Nous exposons les différentes étapes de la méthode de Monte Carlo (MCM) ainsi que ses avantages. Pour illustrer cette technique, nous présentons deux exemples appliqués à la métrologie et aux essais, en mettant en parallèle la propagation des variances et la propagation des distributions.

Abstract

The supplement 1 to the GUM, dealing with the evaluation of uncertainty using the propagation of distributions, will be published this year. This supplement, based on a Monte Carlo method (MCM), allows one to deal with the evaluation of uncertainty even when the hypotheses of the law of propagation of uncertainty (LPU) are not verified. We describe the different steps of the MCM and its advantages. Then to illustrate the method, we present two examples in the fields of metrology and testing and we compare the results given by both methods.

Introduction

Le guide pour l'expression de l'incertitude de mesure (GUM) s'appuie sur la loi de propagation des variances (LPU) pour le calcul de l'incertitude-type composée. Celle-ci est estimée à partir d'un développement de Taylor appliqué au modèle du processus de mesure; le calcul requiert donc la validité d'un certain nombre d'hypothèses mathématiques. En premier lieu, le modèle ne doit pas présenter de non-linéarité significative. Les dispersions observées doivent être faibles pour chacune des variables du processus de mesure, comparables du point de vue de leur ordre de grandeur et doivent présenter des distributions symétriques. Enfin, la distribution de la grandeur de sortie du modèle doit présenter un profil gaussien pour pouvoir calculer et interpréter aisément la valeur du facteur d'élargissement k .

D'un point de vue strictement opérationnel, l'application de la loi de propagation de l'incertitude nécessite la dérivation du modèle du processus de mesure par rapport à chacune de ses variables afin d'en estimer les coefficients de sensibilité.

Outre les hypothèses mathématiques de dérivabilité du modèle, son application peut se révéler délicate dans un contexte industriel. Elle peut constituer un frein à l'avancement du calcul et une source d'erreur potentielle.

Une alternative à ce calcul est aujourd'hui décrite dans le premier supplément du GUM, à paraître en 2007 [1]. Le métrologue se voit proposé d'utiliser les outils de simulation numérique et en particulier la méthode de Monte Carlo pour propager non pas uniquement deux statistiques (moyenne et variance) mais les distributions de variables décrivant le processus de mesure.

A titre d'illustration, les deux méthodes d'estimation de l'incertitude-type composée ont été appliquées à deux processus de mesure distincts afin de dégager les points forts de chacune d'entre elles et les difficultés qui peuvent survenir dans le cadre de leur mise en œuvre.

Le premier de ces exemples relève de l'activité de qualification des performances de composants thermiques, menée par le Centre Technique des Industries Aéronautiques et Thermiques. Il s'agit du processus de détermination de la puissance thermique fournie, par exemple, par une chaudière et dont l'incertitude est classiquement obtenue à l'aide de la loi de propagation.

Le second exemple est emprunté à la métrologie des masses, il concerne la détermination de la masse conventionnelle d'un corps.

Propagation des distributions par la méthode de Monte Carlo

Compte tenu des limites et contraintes de la méthode LPU décrite dans le GUM pour évaluer l'incertitude de mesure, une approche alternative a été développée. Cette approche connue sous le terme de méthode de Monte Carlo (MCM) fait l'objet du supplément 1 au GUM à paraître prochainement. Il est important de noter que ce supplément ne vient pas remplacer la norme NF-ISO 13005 (GUM) mais la compléter.

Le principe de cette méthode n'est plus de propager l'incertitude via le modèle, mais la fonction de densité de probabilité (PDF) des grandeurs d'entrée afin d'obtenir la

PDF associée au mesurande. La PDF de chaque grandeur d'entrée étant connue, la PDF du mesurande Y peut être analytiquement obtenue par la formule de Markov. En pratique, mis à part pour des modèles très simples, l'intégrale multiple ne peut pas être évaluée analytiquement. Ainsi le supplément 1 au GUM fournit une méthode numérique qui met en application la propagation des distributions en utilisant une méthode de Monte Carlo (MCM).

Cette approche alternative peut se résumer étape par étape, voir la figure 1, selon le processus suivant :

1. Définir le mesurande, le processus de mesure, les facteurs d'influence et expliciter le modèle mathématique. Cette étape, essentielle, est en fait commune à toutes les méthodes d'évaluation de l'incertitude.
2. Associer à chaque grandeur d'entrée une distribution (normale, rectangulaire, etc.) ou une distribution conjointe dans le cas de variables corrélées. Ce choix doit être fait en tenant compte de l'information disponible et selon le

principe du maximum d'entropie. C'est-à-dire choisir la PDF g qui maximise l'entropie S:

$$S[g] = - \int g_x(\xi) \ln g_x(\xi) d\xi$$

3. Générer M réalisations de chaque grandeur d'entrée par tirages dans leur PDF. Pour effectuer ces simulations, il est nécessaire de disposer d'un générateur de nombres pseudo aléatoires suffisamment performant (il doit passer un certain nombre de tests). Le supplément 1 au GUM préconise de procéder à $M = 10^6$ tirages.
4. Calculer via le modèle mathématique les M valeurs obtenues de la grandeur de sortie, ce qui permet de construire la distribution empirique du mesurande.
5. Synthétiser l'information obtenue sur le mesurande en restituant :
 - a. L'espérance mathématique
 - b. L'écart type
 - c. L'intervalle le plus court au niveau de probabilité spécifié (souvent 95%)

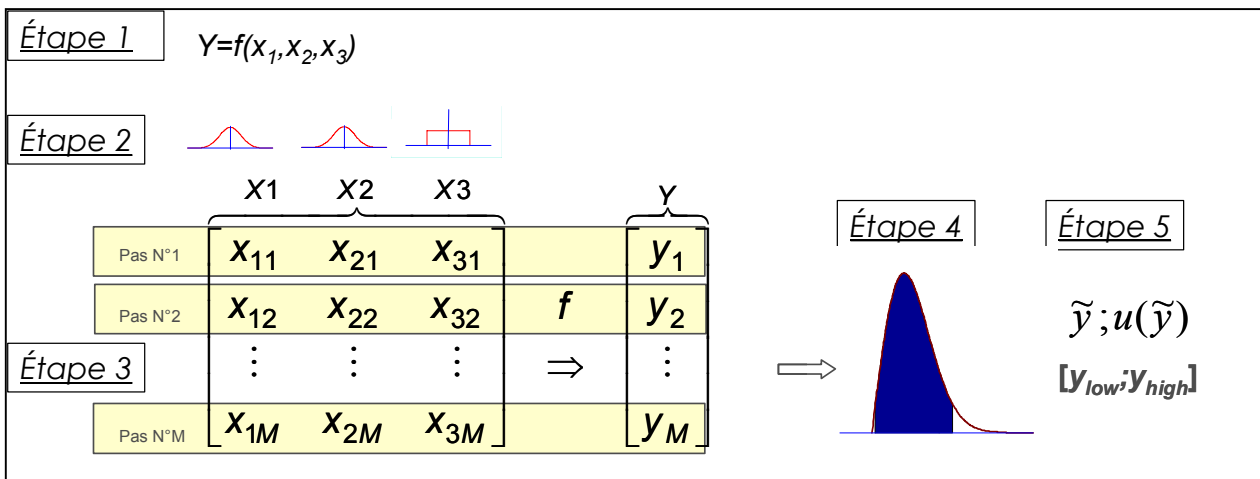


Figure 1 – Les différentes étapes de la méthode de Monte Carlo

La méthode d'évaluation de l'incertitude par propagation des distributions ainsi décrite présente plusieurs avantages par rapport à l'approche traditionnelle basée sur la loi de propagation de l'incertitude :

- plus aucun calcul de dérivée partielle n'est nécessaire
- plus de limite de validité de la méthode liée à la non linéarité du modèle et/ou des incertitudes " fortes " sur les grandeurs d'entrée.
- plus aucune difficulté liée au choix du facteur d'élargissement.

De plus selon le supplément 1 du GUM (sub. 8.1.1), le cadre de validité de la MCM est plus large que celui de la méthode LPU. Par conséquent, il est recommandé d'utiliser les résultats de MCM pour valider ceux obtenus par la méthode LPU. Une procédure de validation simple est décrite dans le supplément.

Tout d'abord il est nécessaire de déterminer la tolérance δ associée au résultat z calculé. Celui-ci est exprimé sous la

forme $z = c \cdot 10^l$ où c est la valeur du dernier digit, n_{dig} , jugé significatif pour z. Alors, on écrira : $\delta = 0,5 \cdot 10^l$. Prenons l'exemple de l'estimation de l'incertitude $u(y)$ d'une masse où seul un chiffre significatif est retenu. Ceci signifie que, $n_{dig} = 1$, $u(y) = 0,0006$ g, c'est-à-dire $c = 6$ et $l = -4$. La tolérance vaut alors : $\delta = 0,5 \cdot 10^{-5}$ g.

La seconde étape du processus de validation revient à comparer les incertitudes élargies obtenues par chacune des méthodes. On forme les différences :

$$d_{low} = |y_{lowLPU} - y_{lowMCM}|$$

$$d_{high} = |y_{highLPU} - y_{highMCM}|$$

Si ces différences sont toutes les deux inférieures à la tolérance préalablement déterminée, alors les résultats obtenus par la méthode LPU auront été validés. Dans le cas contraire, il faudra s'en tenir aux résultats obtenus par la méthode MCM.

Application dans le domaine des essais

Le CETIAT, Centre technique des Industries Aéronautiques et Thermiques, réalise des essais de performances thermiques de composants (chaudières, climatiseurs, etc.). Un processus de mesure fréquent est la détermination de la puissance thermique d'un composant. Celle-ci est déterminée par un ensemble de mesurages (température d'entrée, température de sortie, débit) et de calculs (enthalpie, puissance).

Description du processus de mesure

Le montage expérimental mis en œuvre lors de la détermination de la puissance thermique récupérée au circuit secondaire d'un échangeur de chaleur est représenté figure 2.

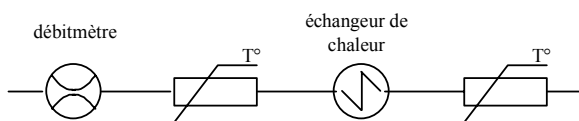


Figure 2 - Dispositif de mesure de la puissance thermique

La puissance thermique est le produit de la valeur du débit massique d'eau circulant dans l'échangeur par la différence d'enthalpie massique mesurée aux bornes de ce dernier, selon la relation :

$$P = q_m \cdot [h(T_s) - h(T_e)]$$

avec

- q_m : débit massique d'eau dans l'échangeur, en $\text{kg}\cdot\text{s}^{-1}$
- T_s : température de l'eau en sortie d'échangeur, en $^{\circ}\text{C}$
- T_e : température de l'eau en entrée d'échangeur, en $^{\circ}\text{C}$
- $h(T)$: enthalpie de l'eau à la température T , en $\text{kJ}\cdot\text{kg}^{-1}$

Le débit est déterminé par un débitmètre massique à effet Coriolis dont les caractéristiques métrologiques sont suivies par un étalonnage périodique. Les températures d'eau en entrée et en sortie de l'échangeur sont mesurées à l'aide de Pt100, étalonnées régulièrement. Les sources d'erreur associées aux mesures sont liées aux caractéristiques métrologiques de l'instrumentation (justesse, répétabilité) et aux conditions de mise en œuvre (stabilité, influence des conditions d'environnement, homogénéité de la température dans la section, etc.).

L'enthalpie est calculée à partir de la température, par une formule de lissage qui présente une erreur de lissage liée à la justesse des valeurs de référence et à la qualité de l'interpolation. Elle est mise sous la forme $h(T) = h(T) + \alpha$, où α représente la correction de lissage, nulle en moyenne et assortie d'une incertitude.

Application de la loi de propagation

En l'absence de corrélations entre les estimations des variables, l'application de la loi de propagation de l'incertitude conduit à l'équation :

$$u_c^2(P) = \left[\frac{\partial P}{\partial q_m} \right]^2 \cdot u^2(q_m) + \left[\frac{\partial P}{\partial T_s} \right]^2 \cdot u^2(T_s) + \left[\frac{\partial P}{\partial T_e} \right]^2 \cdot u^2(T_e) + \left[\frac{\partial P}{\partial \alpha_e} \right]^2 \cdot u^2(\alpha_e)$$

En pratique, ce calcul est directement programmé dans le logiciel de traitement des résultats spécifique aux plates-formes d'essai, dans un onglet Excel. Les informations relatives aux incertitudes-types de type B sont mises à jour en fonction des informations issues du logiciel de gestion de parc tandis que les incertitudes de type A sont calculées à partir des mesures de chaque essai.

Application de la méthode de Monte Carlo

L'application de la méthode de Monte Carlo demande un calculateur spécifique permettant d'obtenir des tirages aléatoires en nombre suffisant ($>10^6$), avec un générateur dont la période est supérieure au nombre de tirages. Le calcul est réalisé dans un logiciel spécifique (BOOST), préalablement validé par application des exemples présentés dans le supplément 1 du GUM. Ce logiciel est indépendant du logiciel de traitement des résultats sur les plates-formes d'essai.

Le logiciel BOOST permet de définir un module pour chaque grandeur du modèle (température d'entrée, température de sortie, débit, etc.) puis de les assembler en un métamodule "puissance". Pour chaque grandeur, l'utilisateur écrit le modèle de manière explicite, en langage C, via une interface de saisie. Enfin, il choisit la valeur numérique de chaque terme du modèle, son incertitude associée et la fonction de probabilité.

Les coefficients de sensibilité du modèle du processus de mesure par rapport à chacune de ses variables peuvent ensuite être estimés (au signe près) selon la méthode décrite en annexe B du supplément 1 du GUM, en effectuant des simulations où les valeurs des autres paramètres sont fixées.

Comparaison des deux méthodes

La méthode de Monte Carlo est utilisée dans le but de conforter les hypothèses d'application de la loi de propagation des incertitudes au processus de mesure considéré. La comparaison des deux méthodes de calcul ne peut être réalisée que par des calculs utilisant les mêmes valeurs d'entrée (exemple en tableau 1) et les mêmes hypothèses sur les fonctions de densité des variables.

Le calcul a été réalisé pour un nombre fini de cas, correspondant aux situations les plus fréquentes rencontrées lors des essais. Il montre que les valeurs d'incertitude obtenues par les deux méthodes sont concordantes. En effet, les écarts observés entre les deux méthodes sont conformes au critère de validité proposé dans le supplément 1 du GUM et sont minimes devant la sensibilité du calcul aux variations d'une variable d'entrée.

La densité de probabilité de la puissance thermique P est représentée sur la figure 3 pour 10^6 tirages aléatoires

correspondant aux valeurs du tableau 1. La courbe gaussienne de même écart-type, représentée par un trait noir, se superpose avec l'histogramme, montrant que l'hypothèse de considérer la PDF de la puissance P comme gaussienne est acceptable.

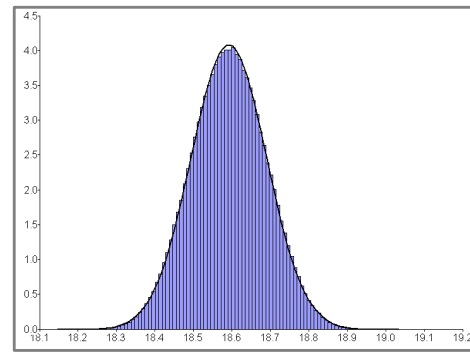


Figure 3 - PDF de la puissance P

Tableau 1 - Exemple de résultats comparés pour un jeu de données d'entrée

Grandeur	Valeur	Unité	Loi de propagation		Monte Carlo	
			Incertitude-type	Coefficient de sensibilité	Incertitude-type	Coefficient de sensibilité
Débit massique q_m	804,6	kg/h	2,9625	$2,31 \cdot 10^{-2}$	2,9595	$2,31 \cdot 10^{-2}$
Enthalpie en entrée $h(T_e)$	251,39	kJ/kg	0,2091	$2,24 \cdot 10^{-1}$	0,2171	$2,23 \cdot 10^{-1}$
Enthalpie en sortie $h(T_s)$	334,57	kJ/kg	0,2098	$2,24 \cdot 10^{-1}$	0,2218	$2,23 \cdot 10^{-1}$
		Unité	Valeur	Incertitude élargie ($k=2$)	Valeur	Incertitude élargie ($k=2$)
Puissance P		kW	18,59	0,19	18,59	0,20

Conclusion

En pratique, la loi de propagation de l'incertitude est utilisée en routine, pour obtenir un résultat dès l'acquisition des données, dans le logiciel de dépouillement des essais. Ce calcul est validé par la comparaison avec l'application de la méthode de Monte Carlo.

Cependant, au-delà du choix du critère de validité, une des limites de la validation est sa représentativité par rapport au domaine de variation des variables du modèle et des incertitudes-types associées à chaque composante.

En effet, l'application de la méthode de Monte Carlo pour la validation de l'application de la loi de propagation en une valeur unique n'est pas suffisante. Pour une validation qui se veut complète, il convient de mener un nombre minimal de simulations, en explorant deux dimensions pour chaque variable du modèle : l'étendue de mesure d'une part et les valeurs d'incertitude-type d'autre part.

Le problème à traiter devient multidimensionnel. Le temps de calcul étant un paramètre non négligeable, il convient de traiter ce cas par l'application des plans d'expérience pour explorer toute la surface de réponse et la comparer à la surface de réponse de l'application de la loi de propagation. Au-delà de la maîtrise des éléments de métrologie permettant de réaliser le bilan des incertitudes, cette validation exige alors la maîtrise des plans d'expérience, couplée à la maîtrise de la simulation numérique.

Application en métrologie

L'application que nous présentons est issue de travaux de l'unité technique Masse du centre de métrologie scientifique et industrielle du LNE. Il s'agit de l'étalonnage en masse conventionnelle d'un étalon de classe F1 à partir d'un étalon de classe E2 [4]. Cet étalonnage a pour particularité de prendre en compte la correction de poussée de l'air. L'exemple présenté dans cette étude est très proche de celui développé dans la partie 9 du supplément 1 au GUM.

Mesurande et processus de mesure

L'étalonnage a pour objet la détermination de la masse conventionnelle de la masse. Le mesurande est donc la masse conventionnelle C_M , d'une masse M . Cette masse conventionnelle d'un corps est égale à la masse d'un étalon de masse volumique 8000 kg.m^{-3} qui équilibre ce corps dans un air de masse volumique $1,2 \text{ kg.m}^{-3}$, l'opération étant effectuée à 20 °C et les paramètres étant définis à cette température.

L'étalonnage d'un étalon de masse (M) consiste à déterminer sa masse par comparaison à la masse (E) d'un étalon de masse. Cette comparaison est faite à l'aide d'un comparateur de masses selon un schéma de substitution de type BORDA doublé.

Modèle mathématique et grandeurs d'entrée

La valeur (C_M) de la masse conventionnelle est donnée par la relation suivante:

$$C_M = C_{Eét} + C_{Ep} + \Delta X + \delta + R + \frac{(a - a_0)(q - r)}{(q - a_0)(r - a)} \times (C_{Eét} + C_{Ep})$$

Avec les symboles suivants :

C_M : masse conventionnelle de la masse M
 $C_{Eét}$: étalonnage de l'étalon E
 C_{Ep} : pérennité de l'étalon E
 ΔX : répétabilité des résultats de la comparaison
 δ : erreur de justesse du comparateur pour la différence d'indication (Δ) entre M et E

R : résolution du comparateur (pas de quantification des indications)
 q : masse volumique de l'étalon E
 r : masse volumique de la masse M
 a : masse volumique de l'air lors de la comparaison
 a_0 : valeur conventionnelle de la masse volumique de l'air = 1,2 kg.m⁻³

Les distributions associées aux grandeurs d'entrée et les paramètres de ces distributions sont résumés dans le tableau 2.

Tableau 2 - Distributions des grandeurs d'entrée

X_i	Distribution	Paramètres			
		Espérance μ	Ecart-type σ	Espérance $x = (a + b)/2$	Demi-étendue $(b - a)/2$
$C_{Eét}$	$N(\mu, \sigma^2)$	100 000,150 mg	0,025 mg		
C_{Ep}	$R(a, b)$			0	4,33.10 ⁻² mg
q	$N(\mu, \sigma^2)$	8 000 kg/m ³	15 kg/m ³		
r	$N(\mu, \sigma^2)$	8 000 kg/m ³	335 kg/m ³		
R	$T(a,b)$			0	0,01 mg
δ	$R(a, b)$			0	1,118.10 ⁻² mg
ΔX	$N(\mu, \sigma^2)$	0,3 mg	0,018 mg		
a	$N(\mu, \sigma^2)$	1,16 kg/m ³	0,058 kg/m ³		
a_0	constante	1,2 kg/m ³			

$N(\mu, \sigma^2)$ signifie loi gaussienne de moyenne μ et d'écart type σ

$R(a, b)$ signifie loi rectangulaire sur le segment $[a, b]$

$T(a, b)$ signifie loi triangulaire isocèle sur le segment $[a, b]$

Propagation et résultats

Une fois définies les lois associées aux grandeurs d'entrée, on effectue des simulations de Monte Carlo pour obtenir la distribution empirique de la grandeur de sortie. On a procédé à 2.10⁵ tirages, nombre suffisant dans cette application pour assurer la convergence des résultats (l'espérance mathématique, l'écart type et l'intervalle à 95%).

Dans le cas de la méthode LPU, un coefficient d'élargissement égal à 2 a été choisi pour calculer l'incertitude élargie. C'est donc sur cette base qu'ont été calculés les intervalles du tableau 3.

Dans ce même tableau est présenté l'ensemble des résultats obtenus par les deux méthodes.

Afin de comparer les deux méthodes, MCM et LPU, nous avons utilisé le critère objectif de validation défini dans [2]. Nous avons considéré, après discussion avec les métrologues, que seul le premier chiffre non nul de l'incertitude-type sur la masse conventionnelle était significatif. Par conséquent nous en avons déduit la valeur de la tolérance δ associée. Puis nous avons

comparé cette valeur aux distances d_{low} et d_{high} entre les intervalles élargis obtenus par les deux méthodes.

Si l'on se limite à un développement au premier ordre de la formule de propagation de l'incertitude (LPU1), les résultats ne sont pas validés. Par contre si l'on prend en compte les termes d'ordres supérieurs et que l'on utilise la formule de propagation de l'incertitude à l'ordre 2, les nouveaux résultats obtenus (LPU2) sont eux bien validés par la méthode de Monte Carlo.

Cet exemple permet ainsi d'illustrer l'une des principales limites de la méthode LPU ; à savoir que lorsque le modèle mathématique n'est pas linéaire, l'approximation d'un développement à l'ordre 1 peut se révéler trop grossière et conduire à des résultats erronés. Dans le cas présent, il apparaît donc nécessaire, pour obtenir des résultats corrects, de développer la formule de propagation à l'ordre 2 (qui nécessite de fastidieux calculs de dérivées partielles) ou d'utiliser la méthode de Monte Carlo.

Tableau 3 - Comparaison des résultats des méthodes LPU et MCM

Méthode	C_M	$u(C_M)$	Plus petit intervalle de confiance à 95 %	d_{low}	d_{high}	LPU validé? ($\delta = 5.10^{-6}$)
	g	g		g	g	
LPU1	100,000450	$4,5.10^{-5}$	[100,000359 ; 100,000541]	$1,6.10^{-5}$	$1,8.10^{-5}$	Non
MCM	100,000492	$5,8.10^{-5}$	[100,000345 ; 100,000559]			
LPU2	100,000450	$5,5.10^{-5}$	[100,000341 ; 100,000559]	$2,5.10^{-6}$	$2,3.10^{-8}$	Oui

Conclusions

Nous avons rappelé succinctement les grands principes de l'évaluation des incertitudes de mesure et évoqué certaines limites et difficultés rencontrées lors de l'utilisation de la méthode de la loi de propagation des incertitudes. Le supplément 1 au GUM fournit quant à lui une méthode alternative basée sur la propagation des distributions utilisant des simulations de Monte Carlo. Nous avons présenté les principales étapes de cette méthode ainsi que certains de ses avantages. Un exemple d'évaluation de l'incertitude sur une mesure de puissance thermique a été exposé et nous a permis de voir que la méthode numérique de Monte Carlo peut venir valider les résultats obtenus par la loi de propagation. Nous avons ensuite présenté un exemple d'évaluation de l'incertitude en métrologie des masses pour lequel on obtient des résultats différents entre les deux méthodes. Nous avons ainsi pu illustrer la nécessité d'utiliser la méthode Monte Carlo lorsqu'une ou plusieurs conditions d'application de la loi de propagation de l'incertitude ne sont plus réunies.

Remerciements

Les auteurs tiennent à remercier Gérald Perrin, auteur du logiciel BOOST, pour sa contribution à l'étude.

Références

[1] BIPM, IEC, IFCC, ISO, IUPAC, IUPAP and OIML, Guide to the Expression of Uncertainty in Measurement, 2nd ed., ISBN 92-67-10188-9, 1995.

[2] BIPM, IEC, IFCC, ILAC, ISO, IUPAC, IUPAP and OIML, Evaluation of measurement data – Supplement 1 to the Guide to the Expression of Uncertainty in Measurement-Propagation of distributions using a Monte Carlo method, draft.

[3] Bédiat N., "Méthode numérique de propagation des incertitudes de mesure (Méthode de Monte Carlo)", NTV 06/022, Note Technique interne CETIAT, 2006, 19 pages.

[4] Gosset A., "Comparaison de masses étalons par substitution. Formules et incertitudes", Note Technique 02 interne LNE/CMSI