

# BALANCE DU WATT FRANCAISE : CONCEPTION ET REALISATION D'UN SYSTEME DE GUIDAGE PAR ELEMENTS FLEXIBLES

F. Villar<sup>1</sup>, J. David<sup>2</sup>, G. Genevès<sup>1</sup>, P. Juncar<sup>3</sup>, P. Pinot<sup>3</sup>

<sup>1</sup>LNE, 29, avenue Roger Hennequin, 78197 TRAPPES Cedex

<sup>2</sup>L2MA-ENSAM, 8 boulevard Louis XIV, 59046 LILLE Cedex

<sup>3</sup>CNAM-INM, 292, rue Saint-Martin, 75141 PARIS Cedex 03

## Résumé

L'expérience de la balance du watt, dont le but est de relier l'unité de masse à une grandeur invariante (la constante de Planck,  $h$ ), requiert de déplacer un conducteur électrique dans un champ d'induction. Un système de guidage par éléments flexibles a été choisi pour assurer cette fonction. L'article présente les raisons de ce choix, ainsi que les principes de conception retenus pour réaliser un prototype. Sa caractérisation métrologique a permis d'apporter des modifications pour améliorer ses performances. Nous présentons de plus un dispositif d'équilibrage passif qui permet de réduire l'effort de commande.

## Abstract

A watt balance experiment links the SI unit of mass – the kilogram – to an invariant quantity – the Planck's constant. One phase of this experiment requires to move a coil inside the flux density field of a magnetic circuit. A flexure strips guiding system has been chosen to fill this function. This paper explains the interests of using this technology and the design principles and techniques used to build a prototype. The guiding straightness has been measured and we propose modifications to improve the performance of this prototype. A balancing system is presented to reduce the force needed to move the mobile part of the guiding system.

## Introduction

### La balance du watt

L'expérience de la balance du watt a pour but de relier l'unité de masse à une constante fondamentale ( $h$ , la constante de Planck). Elle est basée sur une comparaison de puissance électrique et mécanique qui a lieu en 2 phases [1].

Au cours de la première phase, dite statique, la force de Laplace agissant sur un conducteur de longueur  $l$  plongé dans un champ d'induction  $B$  et parcouru par un courant  $i$  est comparée à la force de pesanteur  $M \cdot g$  agissant sur un étalon de masse. A l'équilibre de ces forces, on peut écrire :

$$M \cdot g = B \cdot l \cdot i \quad (1)$$

Durant la seconde phase, dite dynamique, le même conducteur est déplacé à la vitesse  $v$  dans le même champ d'in-

duction. La tension  $u$  induite aux bornes du conducteur est égale à :

$$u = B \cdot l \cdot v \quad (2)$$

Si l'on suppose l'invariance de  $B$  et  $l$  entre les 2 phases, la combinaison des équations (1) et (2) donne :

$$M \cdot g \cdot v = u \cdot i \quad (3)$$

Le premier terme de cette égalité représente une puissance mécanique, le second une puissance électrique.

La chute de potentiel  $V$ , créée aux bornes d'une résistance  $R$  par le courant  $i$ , et la tension  $u$  sont déterminées grâce à l'effet Josephson. La résistance  $R$  est déterminée par l'effet Hall quantique. Grâce à ces 2 effets, la puissance électrique  $u \cdot i$  dans l'équation (3) peut être exprimée comme une fonction de la constante de Planck  $h$  :

$$M \cdot g \cdot v = \frac{A}{4} \cdot h \quad (4)$$

Soit :

$$\frac{h}{M} = \frac{4 \cdot g \cdot v}{A} \quad (5)$$

Le terme  $A$  est issu de la détermination des termes  $u$ ,  $V$  et  $R$  par l'effet Josephson et l'effet Hall quantique. Ainsi, à condition de mesurer l'accélération de la pesanteur et la vitesse de déplacement, l'expérience de la balance du watt permet de relier la masse  $M$  d'un étalon à la constante de Planck  $h$ .

Une description globale de l'expérience en cours de réalisation est donnée dans [2]. L'incertitude relative visée pour la mesure de  $h/M$  est égale à  $10^{-8}$ .

### Mouvement pour la phase dynamique

La seconde phase de l'expérience requiert donc un dispositif mécanique qui assure le déplacement d'un conducteur électrique selon une trajectoire déterminée.

Le circuit magnétique choisi produit un champ d'induction axisymétrique et radial [3]. Le conducteur électrique est donc une bobine circulaire qui doit être déplacée selon une translation rectiligne et perpendiculaire aux lignes du champ pour assurer l'équation (2). De plus, en écrivant l'égalité (1), on fait l'hypothèse que les lignes de champ se situent dans un plan horizontal. La translation est donc verticale.

D'autre part, pour s'affranchir de la correction de poussée de l'air au cours de la comparaison des forces de la phase statique, et pour éviter la correction d'indice de l'air pendant

la mesure de vitesse par interférométrie laser, l'expérience se déroule sous vide ( $10^{-2}$  Pa).

Au vu des incertitudes recherchées, il est nécessaire de réaliser un guidage de très haute qualité et qui introduise le minimum de perturbations dans le système de mesure.

En terme de qualité de mouvement (rectitude, tangage, lacet, roulis), les écarts de la trajectoire réelle par rapport au mouvement théorique sont limités par les incertitudes visées pour la mesure de  $u$  pendant la phase dynamique. En effet, si le champ d'induction possède une composante verticale non homogène, un déplacement horizontal de la bobine induit une tension parasite qui est négligée dans l'équation (2). Pour assurer cette égalité à mieux que  $10^{-8}$  en valeur relative, et si la composante verticale du champ est limitée à  $10^{-4} T$ , on considère que les défauts de guidage doivent être inférieurs à quelques micromètres. Cette performance doit être tenue sur la partie utile de la course, soit 40mm parcourus à la vitesse de 2mm/s. La course totale, qui comprend une phase d'accélération et une phase de freinage, est de 80mm.

De plus, pour assurer une répétabilité convenable des mesures lors de la phase statique, le positionnement de la bobine dans un plan perpendiculaire à l'axe de déplacement doit être répétable à mieux que quelques centaines de nanomètres.

Enfin, pour limiter les perturbations apportées par le dispositif de guidage, il est nécessaire de limiter les variations de l'effort de commande qu'il produit. Celles-ci peuvent être provoquées par les jeux du système, le frottement entre les parties fixe et mobile, et elles peuvent perturber l'asservissement de l'actionneur qui met en position la bobine.

La puissance instantanée de celui-ci devra donc être limitée grâce à un effort de commande faible et régulier. De cette façon, on diminue aussi l'intensité d'une source de chaleur qui est susceptible de provoquer des déformations préjudiciables à la qualité géométrique du guidage.

L'objet de l'article est d'expliquer les choix technologiques et les principes de conception retenus pour mettre en œuvre un système mécanique de guidage en translation qui répond aux spécifications imposées. Il présente aussi les résultats expérimentaux obtenus sur un premier prototype. Ces résultats permettront d'améliorer le dispositif final. Nous présentons aussi un système mécanique qui minimise la puissance instantanée nécessaire au déplacement de la bobine.

## Système de guidage

### Choix des éléments flexibles

Les spécifications demandées au mouvement permettent de choisir une technologie de guidage adapté à l'expérience.

Un guidage par éléments flexibles a été retenu pour les raisons suivantes :

- l'absence de frottement entre les parties fixe et mobile du guidage supprime une source de perturbation sur l'effort de commande,
- l'absence de jeu et d'usure limite les phénomènes d'hystérésis, et augmente donc la répétabilité de positionnement,
- les variations de l'effort de commande sont continues et ne risquent pas de provoquer d'instabilités de vitesse,

- l'absence de lubrification et d'usure favorise son utilisation sous vide.

### Architecture du système

Un dispositif de guidage par éléments flexibles est un agencement particulier de liaisons cinématiques élémentaires et d'éléments rigides dont l'assemblage laisse à la partie mobile les degrés de liberté souhaités. Pour la balance du watt, ce système mécanique doit imposer à la bobine un mouvement de translation rectiligne et verticale. Les variations des 5 autres degrés de liberté du mouvement sont considérées comme des défauts de guidage.

Ces liaisons élémentaires sont réalisées grâce à la déformation élastique de parties minces qui possèdent des directions privilégiées de déformation. Ces parties minces constituent des liaisons cinématiques dont les degrés de liberté sont les mouvements dans ces directions privilégiées. Pour une géométrie donnée, on considère que le degré de liberté existe dans une direction si sa raideur associée est nettement inférieure à celle des autres directions.

Il faut bien noter que ces liaisons flexibles sont calculées dans une situation de « déformation imposée », associée à un ensemble d'hypothèses sur le mode de chargement. Les contraintes résultantes de cet état de déformation doivent être ajoutées à celles issues du chargement utile.

Les mouvements obtenus grâce à ces liaisons flexibles élémentaires sont généralement des rotations. Cependant, leur axe se déplace faiblement au cours du mouvement. En utilisant ces articulations dans notre application, nous choisirons systématiquement une disposition symétrique autour de l'axe de translation pour éviter les inconvénients liés à ce déplacement. Le fait de réaliser un système qui atteindra de grandes déformations oblige à respecter une symétrie globale et à prendre soin de réaliser cette symétrie avec une très grande rigueur.

Pour illustrer le déplacement de l'axe de rotation d'un pivot flexible, on peut prendre pour exemple la déformation d'une lame mince  $AB$ , de longueur  $L$  et d'épaisseur uniforme. Sous un moment constant le long de la lame, elle fléchit d'un angle  $\theta$  selon un arc de cercle (fig. 1). Un chargement de ce type ne provoque pas d'allongement de la lame, donc la longueur curviligne de l'arc est  $L$  et son rayon de

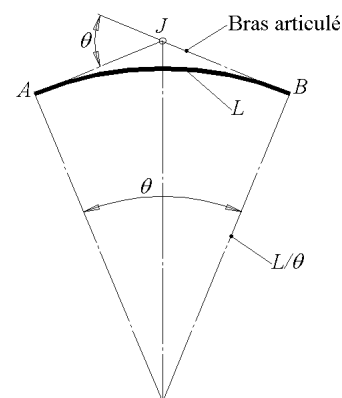


FIG. 1 – flexion circulaire d'une lame mince sous un moment imposé constant.

courbure est égal à  $L/\theta$ .

On peut considérer que l'articulation ainsi réalisée est analogue à celle qui serait constituée de 2 bras rigides, perpendiculaires aux sections d'encastrement et articulés en  $J$ .

Pour un petit angle, la longueur de chacun des bras est  $L/2$ . Pour les grands angles, leurs longueurs  $JA$  et  $JB$  deviennent :

$$JA = JB = \frac{L}{\theta} \cdot \tan \frac{\theta}{2} \quad (6)$$

L'allongement de chacun des bras articulés, par rapport au modèle en petite déformation, est égal à 0,06mm pour la rotation de  $17^\circ$  d'une lame de 15mm de long.

Pour tenir compte de cet effet, la disposition et le nombre des charnières élastiques ont été choisis selon 3 critères :

- bloquer les 5 degrés de liberté non souhaités,
- obtenir une symétrie des déplacements parasites des axes de rotation,
- limiter l'effort de commande, ce qui permet de réduire ses effets parasites sur une structure faiblement rigide.

Le modèle cinématique retenu est composé de 2 étages constitués chacun de 3 jambes et reliés entre eux par la partie mobile. La figure 2 représente en vue de dessus un des étages. Dans le modèle tridimensionnel (fig. 3), l'extrémité de chaque jambe est guidée par une bielle à 2 articulations, dont les angles de rotations sont  $\beta$  et  $\alpha + \beta$ .

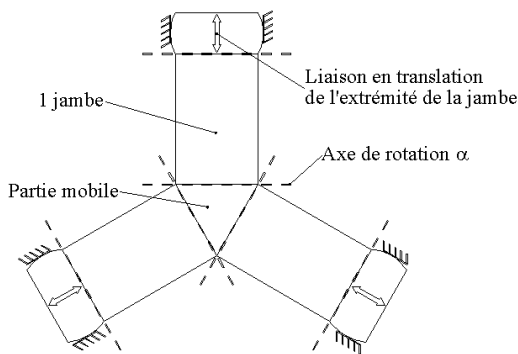


FIG. 2 – vue de dessus d'un étage flexible.

Le choix d'une disposition symétrique conduit à un guidage hyperstatique. L'hyperstatisme peut être à l'origine d'une incompatibilité cinématique qui risque d'entraîner, dans les parties flexibles, des contraintes supérieures aux limites élastiques des matériaux, ou des comportements bistables correspondant à l'existence de deux minimums du potentiel de déformation du système flexible.

Pour éviter ces difficultés, la réalisation mécanique doit être soignée. Alors, la symétrie du système offre les avantages suivants :

- la qualité de guidage est insensible à la façon dont se déforment les pivots flexibles pourvu qu'ils soient cinématiquement identiques,
- le dispositif est insensible aux distributions symétriques des gradients de température,
- l'hyperstatisme permet de moyennner les défauts de fabrication, du moment qu'ils ne provoquent pas un comportement bistable,
- l'intégrité du système est conservée en cas de rupture d'une liaison flexible.

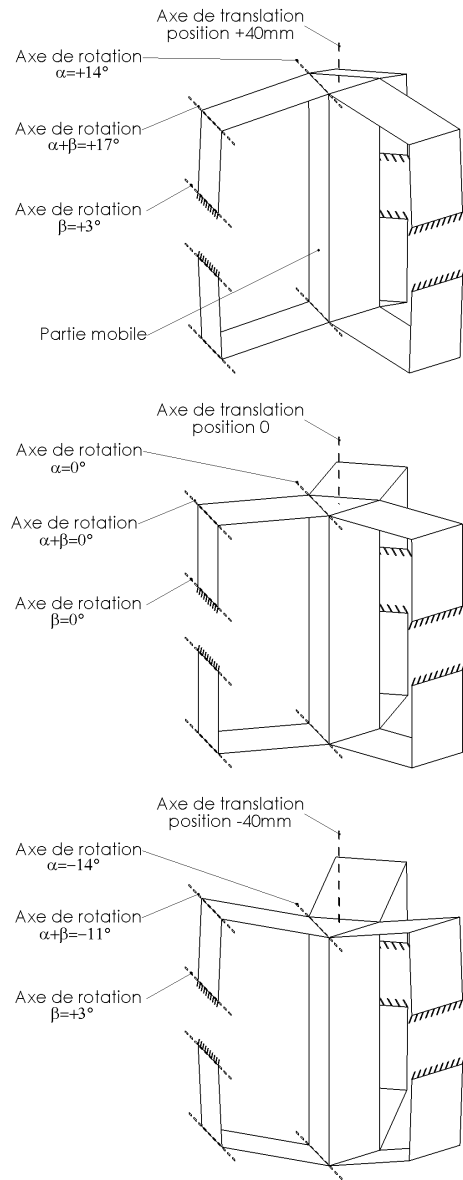


FIG. 3 – modèle cinématique représenté à 3 positions différentes.

## Conception et expérimentation

### Prototype : conception, mesures et analyse

A partir de l'étude théorique présentée, un prototype de guidage (fig. 4) a été réalisé. Selon le modèle cinématique retenu, il est nécessaire de mettre en œuvre, pour chaque jambe du guidage, deux pivots flexibles de grande course (jusqu'à  $17^\circ$ ) qui réaliseront les angles de rotation  $\alpha$  et  $\alpha + \beta$ , et un pivot de faible course ( $3^\circ$ ) qui réalisera l'angle  $\beta$ .

Pour la grande course, nous avons choisi d'utiliser, pour une première expérimentation, des éléments flexibles issus d'un projet précédent. Ils sont composés de 2 charnières élastiques de section rectangulaire et d'épaisseur constante, reliées entre elles par une partie épaisse supposée infiniment rigide. Elles sont réalisées par usinage dans des blocs d'aluminium.

Pour la course de  $3^\circ$ , des éléments flexibles ont été spécialement développés pour ce projet. Ils comportent un seul

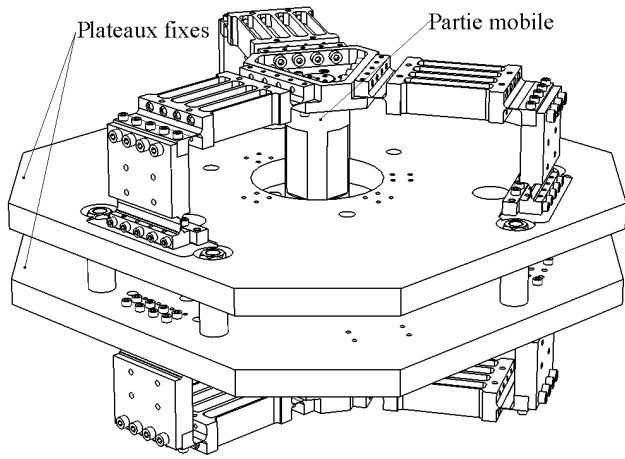


FIG. 4 – système de guidage prototype.

pivot flexible de section rectangulaire et d'épaisseur variable. Ce col flexible est réalisé par usinage avec une fraise torique inclinée ce qui permet d'obtenir une forme pseudo-elliptique avec une très bonne maîtrise de la géométrie.

Cette forme a été choisie car elle correspond à une lame d'épaisseur constante plus courte et donc plus rigide devant l'effort tranchant.

L'assemblage de ces 3 charnières élastiques est représenté en vue de côté sur la figure 5. Il constitue une jambe du dispositif de guidage.

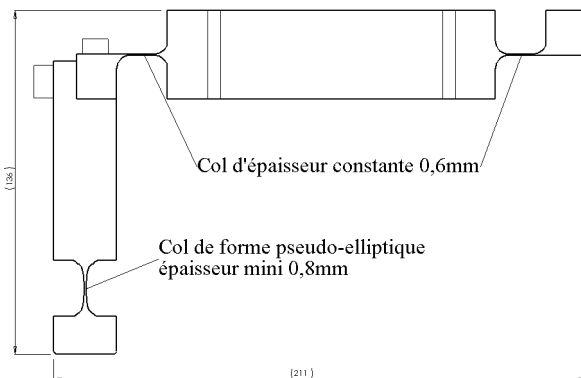


FIG. 5 – Une jambe du système flexible.

La caractérisation métrologique du mouvement de la partie mobile a été effectuée sur une machine à mesurer tridimensionnelle à l'ENSAM de Lille.

Les défauts de guidage ont été mesurés par l'intermédiaire d'un plateau alésé en 8 points et fixé rigidement à la partie mobile (fig. 6). Ils sont décrits pour une course de 48mm, soit  $\pm 24$ mm autour de la position non déformée des parties minces.

Les coordonnées des intersections des axes des alésages et du plan moyen du plateau sont déterminées pour un certain nombre de positions sur l'axe de translation. Grâce à un ajustement aux moindres carrés de ces coordonnées, on peut calculer les variations des 5 degrés de liberté du mouvement qui correspondent aux défauts de guidage. Il s'agit des translations selon Ox et Oy et des rotations selon Ox, Oy et Oz.

Le défaut de rectitude en translation est défini ici comme

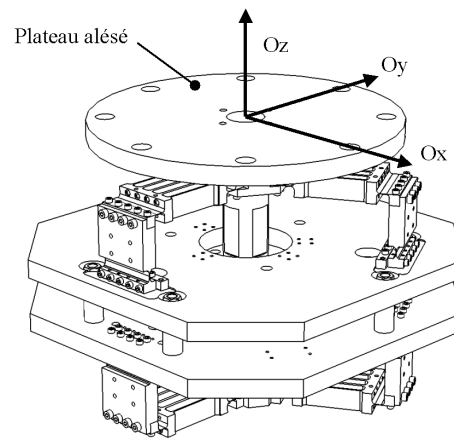


FIG. 6 – plateau et repère de mesure.

la largeur de la bande la plus étroite qui contient tous les points de mesure, cette largeur étant prise dans la direction considérée.

Les résultats des mesures (fig. 7) montrent que le défaut de rectitude pour une course de 48mm est de  $12\mu\text{m}$  pour la direction Ox et de  $2\mu\text{m}$  pour la direction Oy. Le défaut maximum de guidage en rotation est de l'ordre de  $70\mu\text{rad}$ .

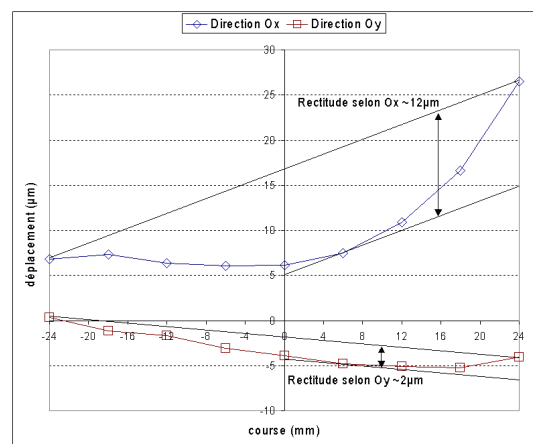


FIG. 7 – translation Ox et Oy de la partie mobile.

Au vu de ces résultats, 2 causes peuvent expliquer ces défauts.

Premièrement, le système mécanique qui permet de positionner la partie mobile transmet des efforts orthogonaux à l'axe de déplacement. L'effort de commande possède une composante orientée selon Ox qui est certainement à l'origine de l'allure du défaut de guidage dans cette direction.

Deuxièmement, dans l'emploi précédent que nous avons fait des éléments à 2 charnières flexibles, nous avons constaté qu'il était difficile de maîtriser la longueur effective de flexion des lames. Celles-ci ont été réalisées par usinage à grande vitesse avec une fraise de petit diamètre dans un quasi balayage, ce qui conduit à une régularité d'épaisseur insuffisante. Cette irrégularité provoque un déplacement sensible de l'axe de rotation de l'articulation équivalente.

Pour illustrer ce problème, on peut reprendre l'exemple de la figure 1. On conserve l'hypothèse d'un chargement

à moment constant, et si l'épaisseur varie sur la moitié gauche de la longueur  $L$  de la lame, alors chaque moitié se déforme selon un arc de cercle de rayon de courbure différent (fig. 8). Une variation de 1,7% de l'épaisseur provoque une différence du moment d'inertie de 5% entre chacune des 2 moitiés. Cette différence entraîne un déplacement latéral vers la droite du centre de rotation de l'articulation équivalente. Pour la rotation de  $17^\circ$  d'une lame de 15mm de long, ce déplacement par rapport à l'axe correspondant à une lame d'épaisseur constante, atteint 0,1mm.

La procédure d'usinage utilisée pour réaliser ces pivots flexibles conduit à des variations d'épaisseur distribuées aléatoirement. Ces charnières sont donc cinématiquement différentes les unes des autres.

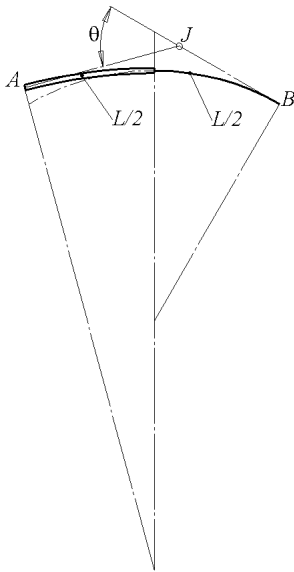


FIG. 8 – flexion d'une lame mince d'épaisseur variable sous un moment imposé constant.

### Modifications : lames croisées rapportées

L'analyse des résultats obtenus sur le prototype est à l'origine de modifications qui visent à augmenter la symétrie du dispositif de guidage.

Pour résoudre le problème lié à la variation d'épaisseur mal maîtrisée des parties minces, nous avons remplacé ces articulations taillées dans la masse par des charnières élastiques qui sont réalisées à partir de clinquant laminé, bridé sur des parties rigides (fig. 9). Le matériau utilisé pour les pivots est un alliage cuivreux (CuSn3Zn9). Le procédé de fabrication des parties minces (laminage), ainsi que des procédures particulières d'usinage, garantissent que les nouveaux éléments flexibles sont géométriquement et cinématiquement identiques entre eux.

Par exemple, pour garantir que les longueurs de flexion des parties minces sont égales, l'usinage des faces fonctionnelles qui définissent ces longueurs est réalisé dans la même gamme de fabrication, en une seule fois pour toutes les parties rigides, les éléments de bridage étant montés et serrés sur des échantillons de lames (fig. 10). Les lames définitives seront bridées avant le démontage des pièces fixées sur le montage d'usinage.

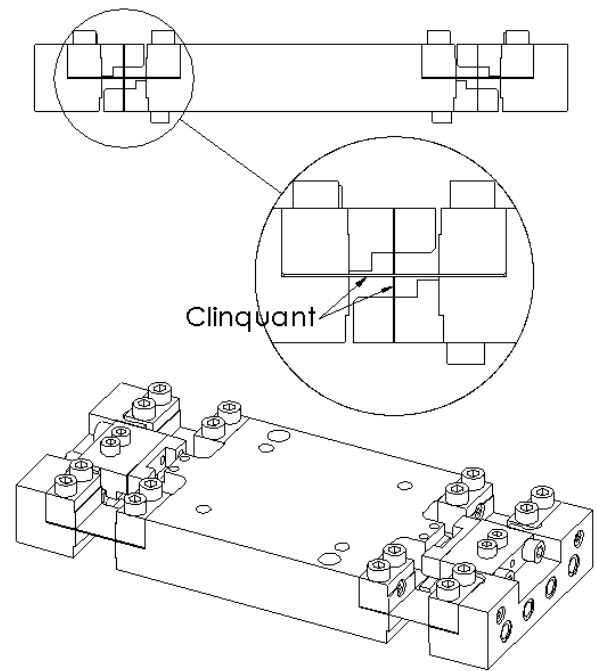


FIG. 9 – Élément flexible à 2 pivots croisés.

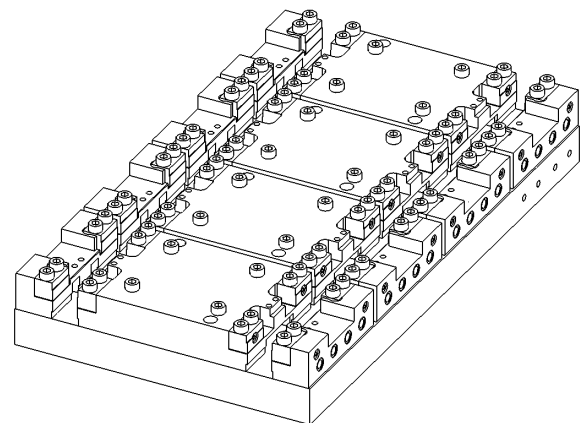


FIG. 10 – Montage d'usinage des parties rigides des charnières croisées.

De plus, afin de garantir le mieux possible la stabilité de la géométrie des pivots, nous avons ajouté des lames perpendiculaires, aboutissant ainsi à des pivots croisés, beaucoup moins sensibles à des effets parasites.

Enfin, pour améliorer la symétrie du guidage, le dispositif de mise en position a été modifié pour minimiser les forces perpendiculaires à l'axe de translation. Pour cela, le système vis-écrou qui permet de déplacer la partie mobile est aligné avec l'axe de symétrie du guidage et il est relié à l'élément mobile par une tige à 2 rotules.

Un autre objectif visé par la modification du prototype est la réduction de l'effort de commande. Pour le dispositif représenté sur la figure 4, il est égal à 320N à la position +40mm.

Cette force est proportionnelle à la raideur angulaire des pivots flexibles. L'épaisseur du clinquant (0,4mm et 0,2mm) a été choisie de façon à diviser par dix la rigidité angulaire.

laire des articulations de grande course. Ainsi, avec ces nouveaux pivots et en conservant les charnières de forme pseudo-elliptique, la force nécessaire à la déformation des parties flexibles est réduite à 60N à la position +40mm.

Pour diminuer davantage cet effort de commande, il est possible d'utiliser un dispositif mécanique passif, présenté dans la suite de l'article. Ce système crée cependant des forces perpendiculaires à l'axe de flexion des charnières élastiques, ce qui justifie l'utilisation de pivots croisés.

## Compensation

L'effort de commande qui permet de positionner la partie mobile selon une direction verticale est la somme du poids de l'équipage mobile et de l'effort de déformation des charnières flexibles.

La force de pesanteur qui agit sur la partie mobile est de l'ordre de 90N pour le prototype équipé des éléments flexibles à lames croisées.

L'effort de déformation des charnières flexibles est calculé en les modélisant par des liaisons pivots à 1 degré de liberté, associées à une raideur angulaire constante. Un calcul analytique a montré que cette hypothèse est vraie à mieux que 1% pour les angles de rotation considérés. La raideur des pivots, calculée analytiquement et par éléments finis, est égale à  $44 \text{ N} \wedge \text{m/rad}$  pour le col pseudo-elliptique et  $1,7 \text{ N} \wedge \text{m/rad}$  pour le pivot croisé. La modélisation géométrique du système (fig. 3) permet de calculer, en fonction de la position de la partie mobile, les angles de rotation des pivots et donc l'énergie de déformation  $U$  du système flexible. La force correspondante est égale à la dérivée de  $U$  par rapport à cette position.

Pour minimiser l'effort de commande, la méthode choisie consiste à fixer des équilibreur aux parties rigides du système de guidage. La masse et la position de ces contre-poids sont déterminées de façon que le travail de leur poids soit opposé à celui développé par l'effort de commande.

Dans la pratique, la compensation exacte est limitée par la modélisation des charnières élastiques, par les approximations faites pour calculer les angles de rotations des pivots flexibles, par la raideur angulaire importante des cols de forme pseudo-elliptique et par le positionnement exact des contre-poids par rapport aux pivots flexibles.

En tenant compte de ces limitations, il est possible de mettre en œuvre un dispositif d'équilibrage qui permet de compenser le poids de l'équipage mobile et de réduire l'effort de déformation des pivots flexibles d'un facteur 10 environ (fig. 11). Les tolérances de positionnement des équilibreurs sont alors de l'ordre du dixième de millimètre et leur poids de l'ordre de grandeur de celui de la partie mobile.

## Conclusion, perspectives

Nous avons présenté les principes et les techniques utilisés pour concevoir un dispositif de guidage en translation nécessaire à la phase dynamique de l'expérience de la balance du watt. Un premier prototype a été réalisé.

Ce prototype démontre qu'une solution basée sur la déformation d'éléments flexibles est tout à fait appropriée pour réaliser un guidage en translation de course décimétrique.

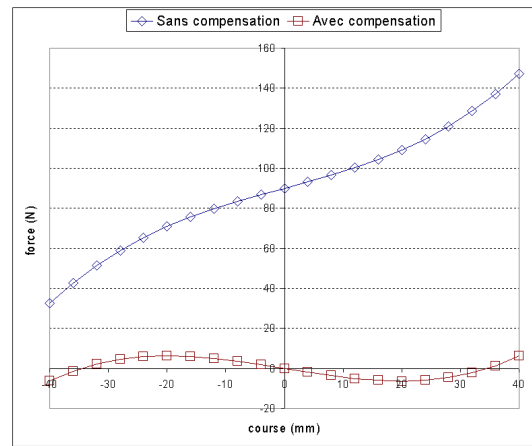


FIG. 11 – effort de commande en fonction de la position verticale.

Le défaut de guidage de  $2\mu\text{m}$ , obtenu dans la direction  $Oy$ , nous laisse penser que les défauts de rectitude du dispositif modifié seront inférieurs aux spécifications demandées.

De plus, dans ce premier prototype, nous avons rapproché ses 2 plateaux fixes pour pouvoir caractériser son mouvement avec la machine à mesurer tridimensionnelle disponible dans nos laboratoires. De cette façon, on a aussi accentué les défauts de guidage sensibles à la proximité des plateaux, c'est à dire les rotations selon  $Ox$  et  $Oy$ . Dans le dispositif final, un écartement plus important permettra de diminuer sensiblement ces défauts.

D'autre part, la modification des pivots flexibles, ainsi que l'utilisation d'un dispositif de compensation, nous a permis de réduire de 320N à 6N l'effort maximum de commande sur toute la course, soit une diminution d'un facteur 50 environ.

La suite de notre travail consiste donc à mettre en œuvre et à valider ces modifications et le dispositif de compensation. Enfin, il nous semble tout à fait réaliste de diminuer l'effort de commande d'un facteur 5 supplémentaire en réduisant la raideur angulaire des pivots pseudo-elliptiques et en ajustant la modélisation cinématique des pivots croisés.

Remerciements : nous remercions la société Méca-Dumont, à Malakoff (92), pour la qualité de la réalisation mécanique du prototype.

## Références

- [1] B. P. Kibble. A measurement of the gyromagnetic ratio of the proton by the strong field method. *Atomic Masses and Fundamental Constants 5* (edited by J. H. Sanders and A. H. Wapstra), pages 545–551, 1976.
- [2] G. Genevès, P. Gournay, A. Gosset, M. Lecollinet, F. Villar, P. Pinot, P. Juncar, A. Clairon, A. Landragin, D. Holleville, F. Pereira Dos Santos, J. David, M. Besbes, F. Alvès, L. Chassagne, and S. Topçu. The BNM watt balance project. *IEEE Transactions on Instrumentation and Measurement*, 54(2), 2005.
- [3] P. Gournay, G. Genevès, F. Alvès, M. Besbes, F. Villar, and J. David. Magnetic circuit design for the BNM watt balance experiment. *IEEE Transactions on Instrumentation and Measurement*, 54(2), 2005.